CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”

Ediţia a XIV-a, Brăila, 7.12.2019

Clasa a IX a

1. Punctele M, N, P se află pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC astfel încât AM, BN, CP sunt concurente în Q, iar Q este centrul de greutate al triunghiului MNP. Să se arate că punctul Q este şi centrul de greutate al triunghiului ABC.

Prof.Nazeli Boicescu, Brăila

Soluţie:

Notăm $PN \cap AM = \{R\}$

Aplicăm teorema lui Menelaus în ΔPNB cu transversala $A-R-Q$ şi obţinem:

$\frac{AP}{AB} \cdot \frac{BQ}{NQ} \cdot \frac{NR}{PR} = 1$. Cum $NR = PR \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{NQ}{BQ} (1)(1p)$

Aplicând aceeaşi teoremă în ΔBCN cu transversala $A-Q-M$, obţinem

$\frac{AN}{AC} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{BQ}{QN} = 1 (2)(1p)$. Conform teoremei lui Ceva în ΔABC avem:

$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 (3)(1p)$

Din (1) şi (2) avem $\frac{AN}{AC} \cdot \frac{MC}{MB} = \frac{AP}{AB}(1p)$ şi din (3) $\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{PB}{AP}(1p)$. Înmulţim aceste două relaţii şi rezultă $\frac{CN}{AC} = \frac{PB}{AB} \Rightarrow PR \parallel BC, PR = RN \Rightarrow M$ mijlocul lui $[BC]$.$(1p)$

Analog se obţine că N şi P sunt mijloacele laturilor AC şi AB, deci Q este centrul de greutate al triunghiului ABC. $(1p)$

2. Se consideră numerele $x_i > 0, i = \overline{1, 2019}$ cu proprietatea $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_{2019}} = 1$.

Demonstraţi că $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_{2019}} \geq 2018\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{x_{2019}}}\right)$.

Prof.Nazeli Boicescu, Brăila

Soluţie:

$$\sum_{i=1}^{2019} \frac{x_i}{1+x_i} = \sum_{i=1}^{2019} \left(1 - \frac{1}{1+x_i}\right) = 2018(1p)$$

Inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent $\sum_{i=1}^{2019} \sqrt{x_i} \cdot \sum_{i=1}^{2019} \frac{1}{1+x_i} \ge \sum_{i=1}^{2019} \frac{x_i}{1+x_i} \cdot \sum_{i=1}^{2019} \frac{1}{\sqrt{x_i}}(1p)$

Cum, efectuând înmulţirile termenii $\sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{1+x_i}$ se reduc cu $\frac{1}{\sqrt{x_i}} \cdot \frac{x_i}{1+x_i}$, este suficient să demonstrăm că, pentru fiecare pereche (i, j) cu $1 \le i < j \le 2019$, are loc:

$$\sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{1+x_j} + \sqrt{x_j} \frac{1}{1+x_i} \ge \frac{1}{\sqrt{x_i}} \cdot \frac{x_j}{1+x_j} + \frac{1}{\sqrt{x_j}} \cdot \frac{x_i}{1+x_i}(2p)$$

Efectuând calculele, obţinem:

$$\left(\sqrt{x_i} - \frac{x_j}{\sqrt{x_i}}\right) \cdot \frac{1}{1+x_j} \ge \left(\frac{x_i}{\sqrt{x_j}} - \sqrt{x_j}\right) \frac{1}{1+x_i}(1p) \Leftrightarrow \left(x_i - x_j\right)\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j}\right)\left(\sqrt{x_i x_j} - 1\right) \ge 0(1p)$$

Ceea ce este adevărat, deoarece $\frac{1}{1+x_i} + \frac{1}{1+x_j} \le 1 \Leftrightarrow x_i x_j \ge 1.(1p)$

3. Se consideră punctul P în interiorul triunghiului ABD al dreptunghiului $ABCD$, $AB > BC$. Demonstraţi că $PA^2 + PM^2 > \frac{AD^2}{4}$, unde $PM \perp BD, M \in (BD)$.

Prof. Daniela și Nicolae Stănică,Brăila

Soluţie:

Fie $d(P, AD) = x$ şi $d(P, AB) = y$

$$A_{ABCD} = PM \cdot BD + x \cdot AD + y \cdot AB(2p) \text{ sau}$$

$$(A_{ABCD})^2 = (PM \cdot BD + x \cdot AD + y \cdot AB)^2 \le \left(PM^2 + x^2 + y^2\right) \cdot \left(BD^2 + AD^2 + AB^2\right)(2p)$$

$$(A_{ABCD})^2 = (PM \cdot BD + x \cdot AD + y \cdot AB)^2 \le 2\left(PM^2 + AP^2\right) \cdot BD^2(1p)$$

$$2\left(PM^2 + AP^2\right) \cdot BD^2 \ge (A_{ABCD})^2(1p) \Leftrightarrow PM^2 + AP^2 \ge \frac{2L^2 \cdot l^2}{4\left(L^2 + l^2\right)} > \frac{AD^2}{4}(1p).$$