CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”

Ediţia a XIV-a, Brăila, 7.12.2019

Clasa a VIII a

1. Determinați perechile de numerele naturale (x,y) care verifică relația:

$$3(3xy+7)^2-7(3x+3y)^2=615.$$

Prof. Carmen şi Viorel Botea, Brăila

***Soluție*:**

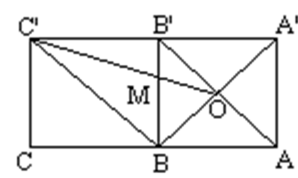
$3(3xy+7)^2-7(3x+3y)^2=615 \Rightarrow 3(3xy+7)^2-63(x+y)^2=615 \,|:3\ (2p) \Rightarrow (3xy+7)^2-$
$-21(x+y)^2=205(1p) \Rightarrow 9x^2y^2+42xy+49-21x^2-21y^2-42xy=205 \Rightarrow 3x^2\left(3y^2-7\right)-$
$-7\left(3y^2-7\right)=205(1p) \Rightarrow \left(3x^2-7\right)\left(3y^2-7\right)=205=5\cdot 41\ (1p)$

Atunci $\begin{cases}3x^2-7=1\\3y^2-7=205\end{cases} \Rightarrow x,y\in\varnothing$ și $\begin{cases}3x^2-7=5\\3y^2-7=41\end{cases} \Rightarrow x=2, y=4 \Rightarrow (x,y)\in\{(2,4),(4,2)\}(2p)$

2. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D', AB=4$ cm şi $AB'\cap BA'=\{O\}$. Dacă punctul $M\in(BB')$ astfel încât $\sin(\measuredangle BOM)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, atunci determinați lungimea segmentului *BM*.

Prof. Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

Soluţie:



Desfăşurăm $BCC'B'$ în planul $ABB'A'$, ca în figura alăturată.

Măsura unghiului $\widehat{C'BO}$ este egala cu $90°(1p)$. $\sin(\sphericalangle BOC')$

În triunghiul dreptunghic $C'BO$, avem $C'B=4\sqrt{2}$ cm și $C'O=2\sqrt{10}$ cm. $(1p)$

Se obține $\sin(\measuredangle BOC')=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\sin(\measuredangle BOM)(1p)$, deci punctele C', M și O sunt coliniare. $(2p)$

Se calculează BM și se obține $BM=\frac{2BB'}{3}=\frac{8}{3}$ cm. $(2p)$

3. Aflați toate numerele $\overline{abcd}$ știind că $3d^2-2c^2-12d+4c\geq 137$ și $7b^2-5a^2-126b+20a\geq 20$.

Prof. George-Florin Șerban, Brăila

Soluție:

$3d^2-2c^2-12d+4c\geq 137,\ 2c^2-4c+2\leq 3d^2-12d-135,\ 2(c-1)^2\leq 3(d-2)^2-3\cdot 7^2\ (1p),$
$0\leq 2(c-1)^2\leq 3(d-2)^2-3\cdot 7^2\leq 3\cdot(9-2)^2-3\cdot 7^2=0,$ rezultă $2(c-1)^2=0,\ c=1,(1p)$
$0\leq 3(d-2)^2-3\cdot 7^2,\ 3\cdot 7^2\leq 3(d-2)^2,\ |d-2|\geq 7,\ d=9.(2p)\ 7b^2-5a^2-126b+20a\geq 20,$
$5a^2-20a+20\leq 7b^2-126b+7\cdot 9^2-7\cdot 9^2,\ 0\leq 5(a-2)^2\leq 7(b-9)^2-7\cdot 9^2\leq 7\cdot 9^2-7\cdot 9^2=0,$
rezultă $5(a-2)^2=0, a=2,(1p), 0\leq 7(b-9)^2-7\cdot 9^2\leq 0, 7(b-9)^2-7\cdot 9^2=0, (b-9)^2=9^2,$
$|b-9|=9, b=0.(1p)$ În concluzie singurul număr cu această proprietate este $\overline{abcd}=2019.(1p)$