CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
Ediţia a XIV-a, Brăila, 7.12.2019

Clasa a VII a

1. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB > BC$. Bisectoarea unghiului $\measuredangle(ABC)$ taie CD în Q şi AD în P. Fie $[DT$ bisectoarea unghiului $\measuredangle(PDQ)$, $T \in (BP)$. Dacă $CT \cap AD = \{M\}$ și $AT \cap CD = \{S\}$, arătaţi că :1) 1) $\triangle DTC \equiv \triangle PTA$;2) $SQ = DM$.

Prof. Daniela și Nicolae Stănică,Brăila

***Soluție*:**

1) $\triangle DTC \equiv \triangle PTA$ (L.U.L.)$\begin{cases} AP = AB = DC \text{ (} \triangle BAM \text{ isoscel şi } ABCD \text{ dreptunghi)} \\ PT = DT \text{ (} DT \text{ bisectoare şi mediana în } \triangle PDQ) \quad (2p) \\ m(\measuredangle APT) = m(\measuredangle CDT) = 45^0 \end{cases}$

2) Din această congruență avem: $AT = TC, \measuredangle PAT \equiv \measuredangle DCT$ si $\measuredangle PTA \equiv DTC$ (1)
Dar $m(\measuredangle PTA) = 90° + m(\measuredangle DTA) = m(\measuredangle ATC) + m(\measuredangle DTA) = m(\measuredangle DTC)$ (conform (1)), deci $m(\measuredangle ATC) = 90^0$ (2) $(2p)$.

Avem acum: $\triangle STC \equiv \triangle MTA$ (C.U.)$\begin{cases} \text{dreptunghice conform (2)} \\ CT = AT \text{ conform (1)} \\ \measuredangle SCT \equiv \measuredangle MAT \text{ conform (1)} \end{cases} \Rightarrow SC = AM$, de unde rezultă

că $SC = AM$ și cum $AD = BC = CQ,$ obținem $MD = SQ.$ $(2p)$

2. Fie triunghiul $\triangle ABC$ şi M,N,P simetricele punctelor A, B, C faţă de centrul de greutate G al triunghiului $\triangle ABC$. Arătaţi că:

1) $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$
2) $A_{ANC} = A_{ABP} = A_{BCM} = \frac{1}{3} A_{ABC} = \frac{1}{3} A_{MNP}$.

Prof. Daniela Tilincă şi Adriana Mihăilă, Brăila

***Soluție*:**

1) Fie R, T, S respectiv mijloacele segmentelor BC, AB, AC
Fie G centru de greutate al triunghiului $\triangle ABC \Rightarrow BG = 2GS \Rightarrow GS = SN$ si $AS = SC \Rightarrow ANCG$ paralelogram $\Rightarrow AN = GC; AN \| GC; AG = NC, AG \| NC$
Fie G centru de greutate al triunghiului $\triangle ABC \Rightarrow AG = 2GR \Rightarrow GR = RM$ si $BR = RC \Rightarrow BGCM$ paralelogram $\Rightarrow BM = GC; BM \| GC; BG = MC, BG \| MC$
Fie G centru de greutate al triunghiului $\triangle ABC \Rightarrow CG = 2GT \Rightarrow GT = TP$ si $BT = TA \Rightarrow AGBP$ paralelogram $\Rightarrow BP = GA; BP \| GA; AP = BG, BG \| AP \Rightarrow$

$AN = BM; AN \| BM \Rightarrow ANMB$ paralelogram $\Rightarrow AB = MN$ $(1p)$

$AP = CM; AP \| CM \Rightarrow APMC$; paralelogram $\Rightarrow AC = PM$ $(1p)$

$CN = BP; CN \| BP \Rightarrow$ $BCNP$ paralelogram $\Rightarrow BC = PN \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle MNP(LLL)$ $(1p)$

2) Demonstrăm că $A_{AGC} = A_{AGB} = A_{BGC}$

În triunghiul $\triangle ABC$, AR mediană $\Rightarrow A_{ABR} = A_{ARC}$

În triunghiul $\triangle BGC$, GR mediană $\Rightarrow A_{BGR} = A_{GRC} \Rightarrow A_{AGB} = A_{AGC}$ $(1p)$

Analog în triunghiul $\triangle ABC$, CT mediană $\Rightarrow A_{ACT} = A_{BCT}$ $(1p)$

În triunghiul $\triangle AGB$, GT mediană $\Rightarrow A_{AGT} = A_{BGT} \Rightarrow A_{AGC} = A_{BGC}$ $(1p)$

$\Rightarrow A_{ANC} = A_{ABP} = A_{BCM} = \frac{1}{3} A_{ABC} = \frac{1}{3} A_{MNP}$ ($\triangle ABC \equiv \triangle MNP$). $(1p)$

3. Aflați numerele naturale a și b care verifică $(a^2 - 6)\cdot(5b^2 + 6b + 2) = 2019$.

Prof. George-Florin Șerban, Brăila

***Soluție*:**

$2019 = 3 \cdot 673$,
$b^2 = M_3, M_3 + 1 (1p) \Rightarrow 5b^2 + 6b + 2 = M_3 + 1, M_3 + 2 (1p) \Rightarrow 3 \nmid 5b^2 + 6b + 2 \Rightarrow 3 \mid a^2 - 6. (3p)$

Avem două cazuri. Dacă $a^2 - 6 = 3$, $a^2 - 6 = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$, $5b^2 + 6b + 2 = 673$, scriem în baza 11 numărul $673 = 5 \cdot 11^2 + 6 \cdot 11 + 2$, deci $b = 11. (2p)$

Dacă $a^2 - 6 = 2019, 5b^2 + 6b + 2 = 1 \geq 0 + 0 + 2 = 2$, fals. În concluzie $a = 3, b = 11$.