CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”

Ediţia a XIV-a, Brăila, 7.12.2019

Clasa a VI a

1. Aflaţi numerele naturale x şi y care verifică relaţia : $x^2 + x \cdot y + 2y = 673$.

Prof. Mihaela Florina Giurcă, Nicoleta Dincă, Brăila

***Soluție*:**

$y \cdot (x+2) = 673 - x^2 \,(1p) \Rightarrow y = \dfrac{673 - x^2}{x+2} \in \mathbb{N}\,(1p)$

$\Rightarrow x+2 \mid 673 - x^2 \,(1p), 673 - x^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0,1,...,25\}\,(1p)$

Dar $x+2 \mid x^2 + 2x$. Deci $x+2 \mid 673 + 2x\,(1p)$.

Deoarece $x+2 \mid 2x+4 \Rightarrow x+2 \mid 669 \Rightarrow x+2 \in \{1;3;223;669\}\,(1p) \Rightarrow x+2=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=224\,(1p)$.

2. Arătați că numărul $x = 2018^n + 2019^n + 2021^n + 2022^n$ nu este cub perfect pentru nici un număr natural n.

Prof. George-Florin Șerban, Brăila

***Soluție*:** Orice cub perfect are forma $n^3 = M_7, M_7+1, M_7+6.\,(1p)$ Dacă $n=3k,$ unde $k \in N,$

$x = 2018^{3k} + 2019^{3k} + 2021^{3k} + 2022^{3k} = (M_7+2)^{3k} + (M_7+3)^{3k} + (M_7+5)^{3k} + (M_7+6)^{3k},$

$x = M_7 + 2^{3k} + M_7 + 3^{3k} + M_7 + 5^{3k} + M_7 + 6^{3k} = M_7 + 8^k + 27^k + 125^k + 216^k,$

$x = M_7 + (M_7+1)^k + (M_7-1)^k + (M_7-1)^k + (M_7-1)^k = M_7 + 1 + 3\cdot(-1)^k = M_7+4, M_7+5, \text{fals}\,(2p)$

Dacă $n = 3k+1,$ unde $k \in \mathbb{N},$

$x = 2018^{3k+1} + 2019^{3k+1} + 2021^{3k+1} + 2022^{3k+1} = (M_7+2)^{3k+1} + (M_7+3)^{3k+1} + (M_7+5)^{3k+1} + (M_7+6)^{3k+1},$

$x = M_7 + 2^{3k+1} + M_7 + 3^{3k+1} + M_7 + 5^{3k+1} + M_7 + 6^{3k+1} = M_7 + 2\cdot 8^k + 3\cdot 27^k + 5\cdot 125^k + 6\cdot 216^k,$

$x = M_7 + 2\cdot(M_7+1)^k + 3\cdot(M_7-1)^k + 5\cdot(M_7-1)^k + 6\cdot(M_7-1)^k = M_7 + 2 + 14\cdot(-1)^k = M_7+2, \text{fals.}$

$(2p)$ Dacă $n=3k+2,$ unde $k \in \mathbb{N},$

$x = 2018^{3k+2} + 2019^{3k+2} + 2021^{3k+2} + 2022^{3k+2} = (M_7+2)^{3k+2} + (M_7+3)^{3k+2} + (M_7+5)^{3k+2} + (M_7+6)^{3k+2},$

$x = M_7 + 2^{3k+2} + M_7 + 3^{3k+2} + M_7 + 5^{3k+2} + M_7 + 6^{3k+2} = M_7 + 4\cdot 8^k + 9\cdot 27^k + 25\cdot 125^k + 36\cdot 216^k,$

$x = M_7 + 4 \cdot (M_7 + 1)^k + 9 \cdot (M_7 - 1)^k + 25 \cdot (M_7 - 1)^k + 36 \cdot (M_7 - 1)^k = M_7 + 4 + 70 \cdot (-1)^k = M_7 + 4,$ fals. $(2p)$ În concluzie numărul x nu este cub perfect pentru nici un număr natural.

3. Determinaţi numerele de forma $\overline{abcde}$ care sunt divizibile cu 10 , sunt pătrate perfecte, iar a, b, c sunt cifre consecutive nu neapărat în această ordine.

Prof. Narcis Gabriel Turcu, Brăila

Soluție: $\overline{abcde} \vdots 10$, $\overline{abcde}$ pătrat perfect $\Rightarrow \overline{abcde} = \overline{abc00} (1p)$

$a + b + c = x + x + 1 + x + 2 = 3(x+1) \vdots 3$

$\overline{abc00} \vdots 3$, pătrat perfect $\Rightarrow \overline{abc00} \vdots 9 \Rightarrow 3(x+1) \vdots 9 \Rightarrow x + 1 \vdots 3 \Rightarrow x \in \{2, 5, 8\} (2p)$

a) $x = 2 \Rightarrow 0 + 1 + 2, 1 + 2 + 3$ nu sunt divizibile cu 9,iar $234, 243, 432, 423, 342$ nu sunt pătrate perfecte.Convine doar 324. $(1p)$

b) $x = 5 \Rightarrow 3 + 4 + 5, 4 + 5 + 6$ nu sunt divizibile cu 9, iar $675, 657, 765, 756, 567$

c) $657, 675, 567$ nu sunt pătrate perfecte.Convine doar 576. $(1p)$

d) $x = 8 \Rightarrow 6 + 7 + 8, 7 + 8 + 9$ nu sunt divizibile cu 9. $(1p)$ În concluzie $\overline{abcde} \in \{32400, 57600\}$ $(1p)$