

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROȘAN-TRIDENT ”
Ediția a XIV-a, Brăila, 7.12.2019

Clasa a V a

1. Fie A un număr natural impar fixat. Arătați că există n număr natural astfel încât $n^2 + nA$ să fie pătrat perfect.

Prof. Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

$n^2 + nA = n(n + A)$. Fie $A = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ (1p). Luăm $n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ (3p).
Atunci $n + A = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ (2p) \Rightarrow
 $\Rightarrow n(n + A) = k^2 (k + 1)^2 = [k(k + 1)]^2$. (1p)

2. Considerăm numerele naturale nenule x și y , $x > y$, cu proprietatea : diferența pătratelor lor este un cub perfect și diferența cuburilor lor este un pătrat perfect. Știind că numerele sunt mai mici decât 15, care este cea mai mare valoare posibilă a lui x ?

(***)

Soluție:

Se observă că $1 \leq y < x \leq 14$ Avem $x^2 - y^2 = n^3$ și $x^3 - y^3 = k^2$ (1p). Atunci
 $3^2 - 1^2 = 2^3$; $6^2 - 3^2 = 3^3$; $10^2 - 6^2 = 4^3$; $14^2 - 13^2 = 3^3$ (4p). Dintre acestea $10^3 - 6^3 = 28^2$ și
 $14^3 - 13^3 \neq p^2$ (1p) \Rightarrow valoare maximă a lui x este 10. (1p)

3. Determinați câte numere de forma \overline{abcd} satisfac simultan condițiile:

1) $\overline{ab} - \overline{ba}$ este pătrat perfect.

2) $c^3 + c = 10 \cdot d$

Prof. Daniela Tilincă, Brăila

Soluție:

$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9(a - b)$; $\overline{ab} - \overline{ba}$ este pătrat perfect $\Rightarrow 9(a - b)$ este pătrat perfect $\Rightarrow a - b$ este pătrat perfect $\Rightarrow a - b \in \{0, 1, 4, 9\}$ (1p)

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \overline{ab} \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$$

$$a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$$

$$a - b = 4 \Rightarrow a = b + 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84, 95\}$$

$$a - b = 9 \Rightarrow a = b + 9 \Rightarrow a = 9, b = 0, \text{fals.} (4p)$$

$$c^3 + c = 10 \cdot d; 10 \cdot d \leq 90 \Rightarrow c^3 \leq 90 \Rightarrow c \leq 4$$

$$c = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$c = 1 \Rightarrow 2 = 10d \text{ (fals)}$$

$$c = 2 \Rightarrow 10 = 10d \Rightarrow d = 1$$

$$c = 3 \Rightarrow 30 = 10d \Rightarrow d = 3$$

$$c = 4 \Rightarrow 68 = 10d \text{ (fals)}$$

$$\Rightarrow \overline{ab00}; \overline{ab21}; \overline{ab33} \text{ (1p)}$$

$$\overline{ab} \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 51, 62, 73, 84, 95\}$$

22 valori pentru $\overline{ab} \Rightarrow 22 \cdot 3 = 66$ valori pentru \overline{abcd} (1p)